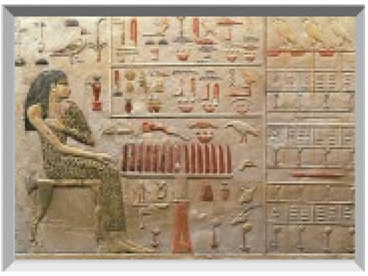


Die Welt der Zahlen

Eine kleine Geschichte der Zahlen

Natürlich sind uns Zahlen ein selbstverständlicher Begleiter in allen Lebenslagen. Als Kleinkind haben wir begonnen zu erkennen, daß es von einer Sache mehrere geben kann (und daß es angenehm ist, möglichst viele davon zu haben). Dann haben uns die Eltern auf die (10!) Finger hingewiesen und daß wir damit die Mengen im kleinen Umfang und abstrakt feststellen können. Der unangenehm genaue Mathematiker sagt auch noch wie das wirklich geht: Man ordne jedem Finger in Gedanken ein Objekt zu und wenn alle zugeordnet sind, hat man die Menge bestimmt. Dies nennt man eine „Abbildung". Sind es drei Dinge zum Beispiel, dann hat man „Mittelfinger der linken Hand" Dinge, bei 7 wäre das „Zeigefinger der rechten Hand". Ist aber irgendwie unpraktisch! Erstens, weil es bei 10 aufhört, zweitens, weil es nicht immer die Finger sind, auf die man abbilden will.

Ganz ähnlich muß man sich in grauer Vorzeit die Entwicklung des Zahlensystems vorstellen. Nur daß die Menschen keine Eltern hatten, die es erzählten. Daher dauerte es auch ein wenig länger.

Als erster Schritt wurden wohl die Finger ersetzt durch abstrakte Begriffe: 1, 2, 3….usw. Das sind neue Schriftzeichen, aber auch Wörter: eins, zwei, drei…… natürlich in der jeweiligen Sprache. Sicher schon vor den Römern war V=5 und X = zehn zu wenig, also hat man neue Begriffe erfunden: L = 5 mal Zehn, C = 10 mal Zehn, D = 5 mal C, also 500 und M = 10 mal C die Tausend (Mille!). Das hat erst einmal gereicht. Alle Zahlen dazwischen hat man durch Aneinanderreihung der Zeichen ausgedrückt: MMXI = 2011 oder XXXVI = 26 und durch die praktische Regelung, statt XIIII = XIX zu schreiben. Die Regel heißt: Wenn ein niederwertiges Zeichen vor einem höheren steht, wird es abgezogen.

Ja, gerechnet habe die Römer auch schon: Etwa so: MMDDCCCLLXII + MCLXI = MMMDDCDLLXXIII.
War schwierig für die Kinder zu erlernen. Und bei großen Zahlen weit über 1000 hat das System ohnehin versagt. Mit der Lösung dieses Problems spielen wir schon die ganze Zeit in diesem Text. Aber sie ist alles andere als trivial.

Die unglaub-liche Null

Es geht nämlich um die „Null" = 0, nämlich nichts. Man nehme eine begrenzte Anzahl von Zeichen für jede einzelne Zahl: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9. Und wenn es am Ende ist, fangen wir wieder von vorne an und fügen nur eine Null dahinter. Damit kann man jede, auch noch so große Zahl darstellen. Und das nur mit 10 Zeichen. Diese geniale Erfindung wurde lange den Arabern zugeschrieben. Nach heutigem Wissensstand stammt sie aus Indien etwa aus dem sechsten Jahrhunder n.Chr.

Und, was beinahe noch wichtiger ist: Man kann einfache Rechenregeln aufstellen, die Sie alle in der Schule gelernt haben und ohne die es auch keine Computer gäbe. Daß wir zehn Zeichen haben, hat wohl mit der Zahl der Finger zu tun. Es funktioniert aber auch mit jeder anderen Anzahl von Zeichen. Daß es in unserer Kultur vielleicht einmal auch 12 waren, könnte man wegen der Zahlworte elf und zwölf, im Gegensatz zur Konstruktion dreizehn, vierzehn und so weiter, vermuten.

Es geht übrigens auch mit zwei Ziffern: 0 und 1. Sie wissen, wer so arbeitet. So zählt und rechnet nämlich der Computer (0 = kein Strom, 1 = Strom): 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000 = 8 in unserem System. Die Zahlen werden zwar schnell sehr groß, der Computer ist aber auch sehr schnell.

Man nennt die Zahlen ab der Null, die „natürlichen Zahlen". Will man, daß 3 – 5 auch eine Lösung hat, nimmt man die negativen Zahlen hinzu (-2 im Beispiel). Alle diese Zahlen heißen dann „ganze Zahlen". Sie kennen sie von den Kontoauszügen. Nicht für alle Probleme reicht das aus. Will man 1 Kuchen in zwei Hälften teilen, hat man keine Zahl dafür. Man muß Sie also erfinden: ½ = „1 geteilt duch 2" (Personen z.B.) soll auch eine Zahl sein. Alle diese Zahlen, die durch Teilung von zwei ganzen Zahlen entstehen, heißen „rationale Zahlen". Sie haben aber ein paar lästige Eigenschaften. Sie sind zum Beispiel nicht richtig geordnet: Von zwei ganzen Zahlen ist eine größer oder gleich der anderen. Bei rationalen Zahlen kann man das zwar auch sagen. Aber zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen, sagen wir p und q, gibt es immer noch eine, die genau dazwischen liegt:
$P< (p+q)/2 < q$: Ein Beispiel: $p = 2/3$ und $q = 3/4$, dann ist $(p+q)/2 = (8/12 + 9/12)/2 = 17/12/2 = 17/24 = 0{,}708333$. Und liegt damit zwischen $2/3 = 0{,}6666$ und $3 / 4 = 0{,}75555$. (Die Regeln für die Addition von rationalen Zahlen und deren Umrechnung in Dezimalzahlen mit Komma erkläre ich hier nicht. Das sollten Sie in der Schule irgendwann gelernt haben!?!)

Die Ideale der Mathematik

Man hat da unbewußt - und das waren noch nicht einmal die Mathematiker - eine ganz neue Welt hervorgebracht. Eine Welt, die es real (was immer das auch heißen mag) gar nicht gibt.

Es gibt keine Kugel. Ob diese Aussage richtig ist, ist eine Frage des Standpunkts. Kommt Ihnen merkwürdig vor? Ist es aber nicht. Es ist nämlich so:

Um eine Kugel herzustellen, muß man erst einmal genau wissen, was eine Kugel ist. Eine Kugel ist ein Körper aus Materie, der von einer Oberfläche begrenzt ist, einer Oberfläche mit folgender Regel: Alle Punkte der Oberfläche haben von einem Punkt, genannt Mittelpunkt der Kugel, den gleichen Abstand. Klingt gut und ist auch unmittelbar einleuchtend. So kann man sich jetzt eine Vorrichtung ausdenken, eine Kugel zu bauen. Darauf will ich hier nicht eingehen, außer einer ganz interessanten Methode: Man wirft eine Portion einer Flüssigkeit in einen luftleeren Raum. Die Flüssigkeit muß so beschaffen sein, daß sie während des Flugs „gefriert". Damit bekommt man eine ziemlich ideale Kugel (so etwas wird in Weltraumlaboren ausprobiert). Warum das so ist, liegt an einer ganz interessanten, geometrischen Eigenschaft der Kugel: Die Kugel ist ein Körper, dessen Oberfläche das größtmögliche Volumen einschließt. Es gibt also keine andere Form, die bei gegebenem Volumen eine kleinere Oberfläche hat. Das kann man übrigens mit Mathematik beweisen. Wegen der Oberflächenspannung, einer weiteren merkwürdigen Eigenschaft von Materie, bildet sich im kräftefreien Raum die ideale Kugeloberfläche von selbst aus. Wirkt eine Kraft, zum Beispiel die Gravitation, wird die Kugel zu einer Tropfenform verzerrt. Das kennen Sie vom Regen.

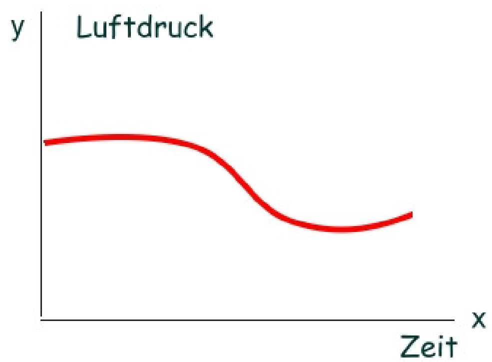
Hat man nun eine feste, wunderschöne Kugel gemacht, so ist etwas festzustellen, was die Freude darüber etwas verdirbt. Sie ist nicht ganz ideal kugelförmig und wenn man sie benutzt, wird sie durch Erosion, mechanische Beanspruchung immer weniger eine ideale Kugel. Genau genommen, gibt es kein Verfahren, eine ideale Kugel herzustellen oder zu erhalten. Das liegt ganz einfach daran, daß die Kugel ja aus Material bestehen muß und jedes Material hat diesbezügliche Schwächen. Es ist niemals vollständig homogen und die Oberfläche nie wirklich glatt. Jedenfalls nicht, wenn man mit Mikroskopen ganz genau hinschaut. Sie kennen das von unserem Beispiel der Längenmessung aus einem anderen Schriftstück.

Was will damit gesagt sein? Nun, man kann sich eine Kugel ausdenken und beschreiben. In Wirklichkeit geben tut es sie nicht – niemals. Also gibt es keine Kugel. Oder doch? Es gibt sie in unserer geistigen Vorstellung, aber nicht real und anfaßbar. Das ist Mathematik.

1D, 2D, 3D und mehr

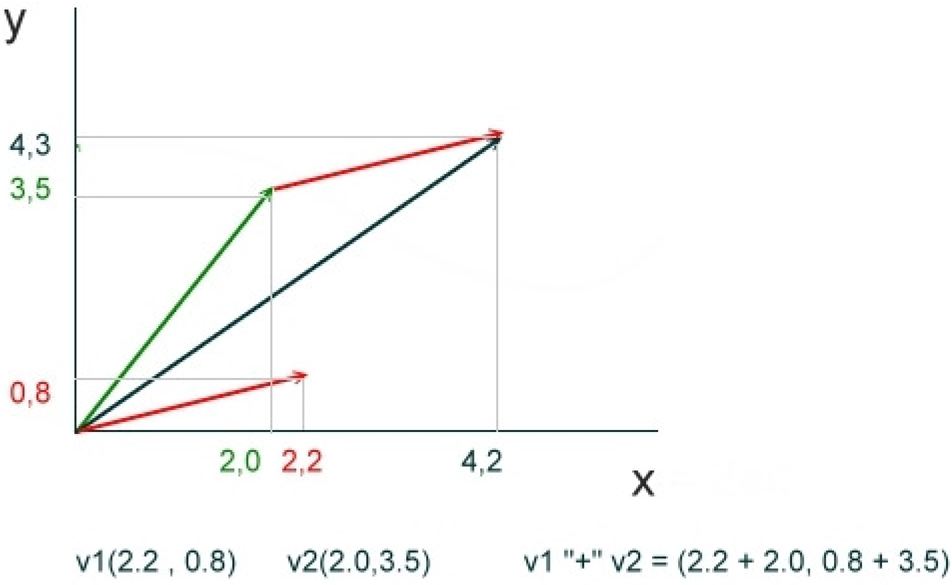
Die Mathematiker können sich komische Dinge ausdenken. Nehmen wir noch einmal das Beispiel der Längenmessung. Auf einer Geraden haben zwei Punkte einen bestimmten Abstand, der sich aus den zwei Messungen der einzelnen Abstände ergibt. Wenn einer 5 cm vom Nullpunkt weg ist und der andere 8,5 cm ist der Abstand 3,5 cm. Ist einleuchtend.

Wie ist es aber mit Punkten in Flächen? Machen wir ein Beispiel:

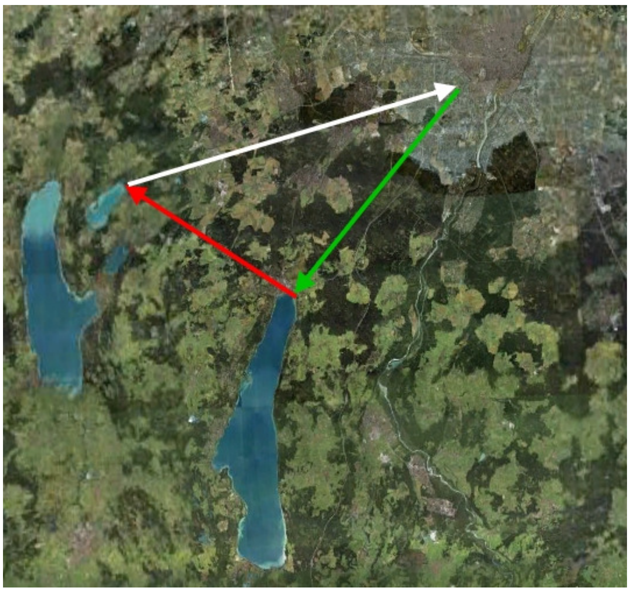


Solche Diagramme kennen Sie. Hier ist der Verlauf des Luftdrucks in der Zeit aufgetragen.

Ein Punkt in so einem Diagramm ist eindeutig beschrieben durch seinen Abstand auf der x-Achse und den auf der senkrecht dazu stehenden y-Achse. So ein Punkt würde in obigem Beispiel den Luftdruck zu einem bestimmten Zeitpunkt repräsentieren. Man nennt den Pfeil vom Nullpunkt zu so einem Punkt auch „Vektor".

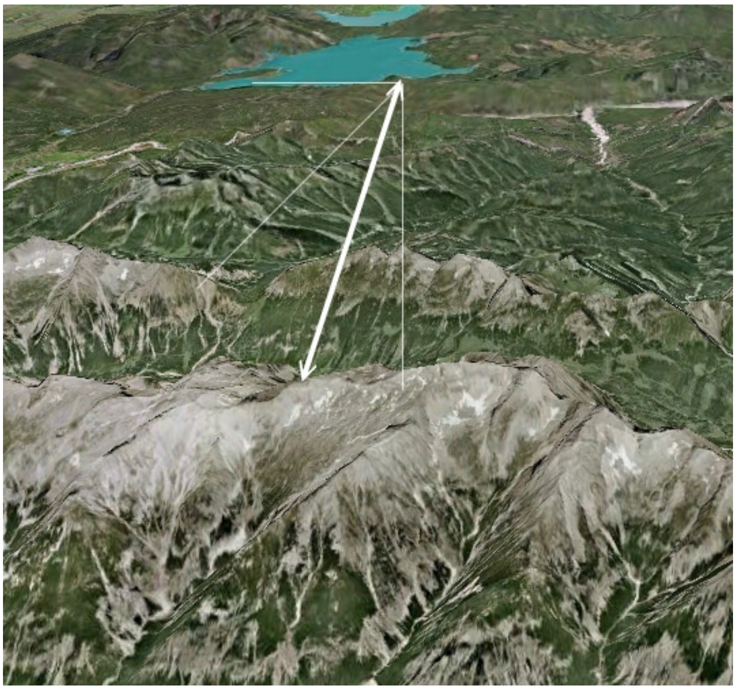


Mit Vektoren kann man rechnen. Zum Beispiel kann man sie addieren. Man muß nur sagen, wie so eine Addition gehen soll. Definiert wird das auf natürliche Weise, eben durch Addition der x- bzw. y-werte. Diese „Definition" ist unmittelbar einleuchtend und auch wirklich sinnvoll.



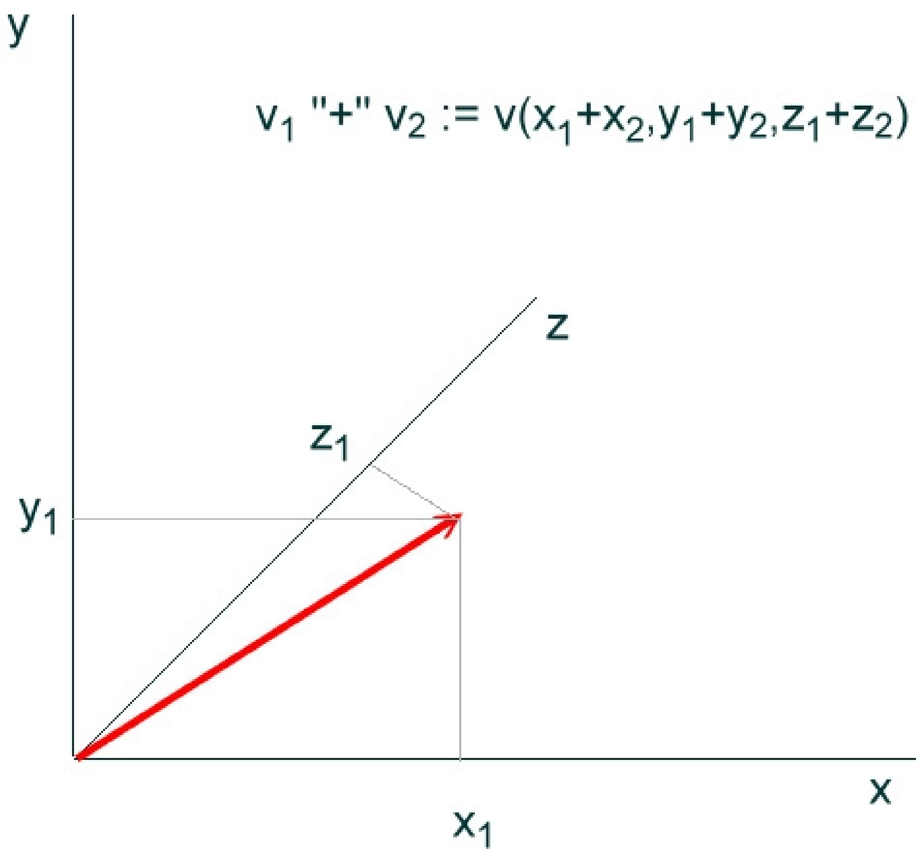
Dieses Beispiel zeigt die Anwendung dieser Definition zur Bestimmung von Abständen auf der Landkarte, also für die Berechnung von Wegstrecken.

Die nahezu gleiche Methode wird benutzt, um Abstände oder Höhen in echten 3D –Landschaften zu berechnen.



Quelle: Google Earth

Die Rechenmethode ist analog zu der im 2D – Bereich.



4 Dimensionen:

$$v_1 \text{ "+" } v_2 := v(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, u_1+u_2)$$

Und jetzt waren die komischen Mathematiker am Werk. Sie haben gesehen, daß das mit 2D und 3D alles ganz gleich ist. Warum sollte man dann nicht auch einen 4D – Raum ausdenken oder einen 100D –Raum. Auch die Abstandsbestimmung zweier Punkte ist ganz logisch auch für solche Räume definierbar.

$|x - y|$ = 2 cm

$\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

nD

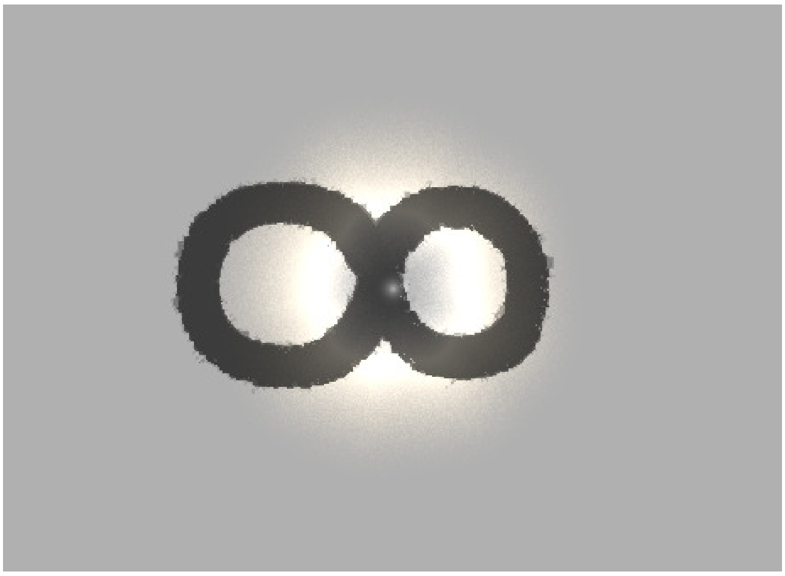
Der Haken an der Sache ist, daß es den 4D oder überhaupt mehrdimensionalen Raum gar nicht gibt – in Wirklichkeit. Aber was schert es den Mathematiker. Denken kann man das alles ohne Probleme. Und rechnen kann man damit spielend auch. Oder gibt es so etwas doch in „Wirlichkeit"? Nun, ein äußerst berühmtes Beispiel ist das Einstein'sche Raum-Zeit-Kontinuum. Einstein hat damit angefangen, die Zeit einfach als vierte Dimension den drei Raumdimensionen hinzuzufügen. Und er hat damit eine äußerst erfolgreiche Sache in Gang gesetzt, als er angefangen hat, damit zu rechnen.

Wie schon einmal früher erwähnt, vorstellen kann sich das unser Gehirn im Sinne der Anschauung der realen Welt nicht, aber geben tut es so etwas ohne Frage. Oft geschieht es, daß aus solchen mathematischen Ideen Schlußfolgerungen gezogen wurden, die die Suche nach einer bestimmten Sache auf die richtige Fährte geleitet haben. Berühmt sind die Antiteilchen in der Atomphysik. Positronen (das Gegenstück zu Elektronen) wurden nur mathematisch vorhergesagt, dann aber auch wirklich in ihrer Existenz bestätigt.

Sie ist also nicht nutzlos, die Mathematik. Aber, wir wollen es trotzdem betonen: Sie handelt von Dingen und Strukturen, die sich das menschliche Gehirn ausgedacht hat, die auf merkwürdige Weise häufig einer realen Eigenschaft der Welt entsprechen. Einer Welt aber, die uns in der direkten Anschauung mit unseren Sinnen aber oft nicht zugänglich ist.

Eine weitere Merkwürdigkeit der Mathematik ist die

Unendlich, was ist das denn?



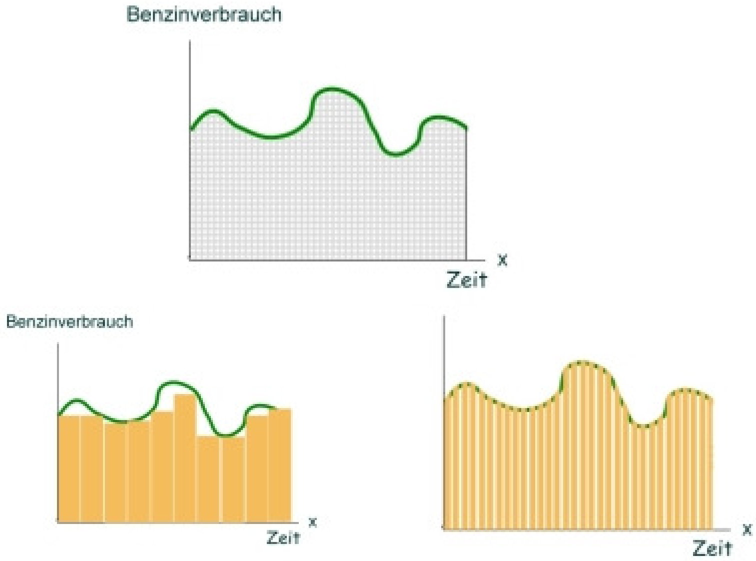
Unendlichkeit. Es gibt unendlich viele natürliche Zahlen. Irgendwie leuchtet das jedem ein. Zur Erinnerung: Die natürlichen Zahlen sind 1,2,3,4,5,6 usw. Der Mathematiker gibt sich aber mit „Einleuchten“ nicht zufrieden. Wie würde es der Mathematiker definieren?

Er würde es so machen (und tut es auch so): Erst einmal schränkt er den Begriff auf Mengen ein, die „gerichtet“ sind. Das bedeutet: Für jedes Paar von Elementen gilt, daß eines größer ist als das andere. Unendlich ist eine Menge (z.B. von Zahlen) dann, wenn es zu jeder, aber auch wirklich jeder Zahl noch mindestens eine gibt, die noch größer ist. Klingt kompliziert, ist aber nötig, um einen wissenschaftlich sauberen Begriff zu haben. Alles ander wäre zu vage und unsicher und könnte zu falschen Schlüssen führen.

Jetzt müssen wir aber noch beweisen, daß die natürlichen Zahlen unendlich sind: Nehmen Sie als Beispiel die Zahl: 1543654342344535645345356564563453453453453. Dann ist 1543654342344535645345356564563453453453454 auch eine natürliche Zahl und größer ist sie auch. Ganz allgemein: Man nehme eine natürliche Zahl, nennen wir sie „n“ und bilden „n+1“, dann haben wir die größere Zahl, die ebenfalls eine natürliche Zahl ist, weil das Addieren von natürlichen Zahlen wieder eine natürliche Zahl ergibt.

Wozu braucht man eingentlich überhaupt diesen Begriff „unendlich“. Ein wichtiges Beispiel ist das berühmte und bei vielen Schülern eher berüchtigte „Integrieren“.

Nehmen wir an, wir hätten eine Kurve des Benzinverbrauchs pro km zum Beispiel. Dann möchte man wissen, wie viel man über einen Zeitraum insgesamt verbraucht hat. Das wäre einleuchtend die Größe der Fläche unter der Verbrauchskurve.

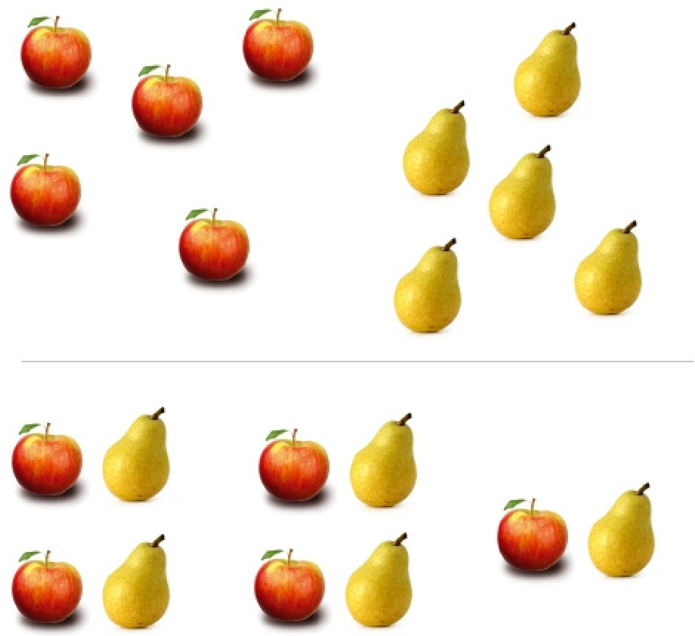


Wie geht man vor? Man denkt sich einfach leicht berechenbare Rechtecke unter der Kurve und zählt deren Fläche zusammen. Je schmaler man die Rechtecke macht, desto genauer wird die Berechnung. „Geht" die Breite der Rechtecke „gegen Null", so hat man den genauen Wert, aber „unendlich" viele Rechtecke. Aus diesen Überlegungen ist die so erfolgreiche „Infinitesimal-Rechnung" entstanden, die Rechnung mit dem Unendlichen. Bei nicht sehr komplexen Kurven lassen sich die Flächen damit ganz einfach berechnen. Daß es unendlich viele Rechtecke in Wirklichkeit gar nicht geben kann, stört dabei überhaupt nicht.

Aber mit dem „unendlich" muß man höllisch vorsichtig sein und darf niemals gewohnte Vorstellungen für beweiskräftig halten. Ein Beispiel: Sie wissen ja mittlerweile, was „rationale" Zahlen sind. Diese Zahlen haben einige komische weitere Eigenschaften.

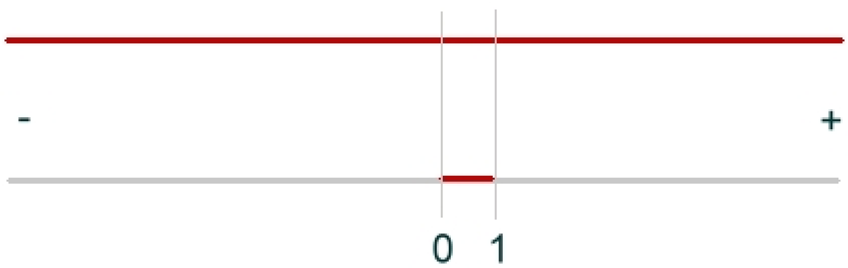
Eine Eigenschaft ist: Sie sind im Zahlenraum absolut dicht. Im mathematischen Sinne definiert, heißt „dicht": Zu je zwei Zahlenpaaren gibt es mindestens eine Zahl, die zwischen den beiden liegt. Für zwei beliebige solche Zahlen, nennen wir sie q und p, ist $(q + p)/2$ eine solche Zahl, wie wir weiter oben schon beschrieben haben. In der Praxis heißt das: Jeder, aber auch jeder Punkt auf einer Geraden, einer Fläche oder einem Raum ist durch eine rationale Zahl definierbar. Und trotzdem gibt es „dazwischen" noch andere, merkwürdige Zahlen. Zahlen, die sich nicht als Bruch darstellen lassen. Das berühmte und geheimnsivolle „Pi" ist eine solche Zahl. (3,14159….. der Umfang eines Kreises vom Durchmesser 1). Man kann beweisen, daß Pi nicht durch einen Bruch darstellbar ist. Das ist schon wirklich merkwürdig, zumal es ebenfalls unendlich viele solcher „irrationaler" Zahlen gibt.

Daß man mit dem „unendlich" vorsichtig sein muß, beweist ein anderes, ebenfalls merkwürdig erscheinendes Beispiel.



„Gleich viel“ kann man im normalen Verständnis so definieren: Eine Menge hat gleich viele Elemente, wenn man jedem Element der Menge genau eines der anderen Menge zuordnen kann.

Mit dieser Definition behaupte ich: Zwischen 0 und 1 gibt es genauso viele rationale Zahlen wie alle anderen rationalen Zahlen. Klingt irgendwie nicht besonders logisch:



Das Zuordnungsprinzip ist ganz einfach: Ist q eine rationale Zahl größer 1, dann ist 1/q ganz sicher eine rationale Zahl zwischen 0 und 1. Also sind es genauso viele.

Der Punkt ist der, daß sich die Mathematik in all ihrer Schlüssigkeit und Richtigkeit irgendwie mit den normalen und vernünftigen Vorstellungen der Welt nicht vereinbaren läßt. Sie „tickt“ anders. Wir befinden uns hier in einer Welt, die uns eigentlich nicht zugänglich ist, die es aber im strengen Sinne ganz sicher gibt – in unseren Köpfen oder auch außerhalb? Wir wissen es einfach nicht und daß kann uns schon sehr nachdenlich machen. Nachdenklich macht es uns, aber gleichwohl werden wir das Problem wohl nicht lösen können.